Муниципальное казённое общеобразовательное учреждение

лицей № 7 г. Солнечногорска

141500, Московская область, тел./факс 8-496-2- 64-59-58
г. Солнечногорск, ул. Почтовая, д.9 e-mail: sunschool.7@mail.ru

Решение показательных и логарифмических неравенств методом рационализации

Учитель математики

Козикова Марина Геннадьевна

2013 г.

В заданиях С3 ЕГЭ по математике очень часто встречаются логарифмические и показательные неравенства, содержащие переменную в основании. При обычном способе решения такие задания требуют длинных выкладок. Гораздо удобнее в таких случаях использовать так называемый «метод рационализации», при котором логарифмические или показательные неравенства легко приводятся к рациональным неравенствам, для решения которых в свою очередь используется классический метод интервалов.

При использовании метода рационализации необходимо знать следующие правила:

1. **Знак разности $a^{f(x)}$- $a^{g(x)}$совпадает со знаком произведения *(a – 1)(f(x) – g(x))*в ОДЗ.**
2. **Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения *(a – 1)(f(x) – g(x))* в ОДЗ.**
3. **Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения *(a(x) – 1)(f(x) – g(x)) в ОДЗ.***
4. **Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения *(a(x) – 1)(f(x) – g(x)) в ОДЗ.***

Рассмотрим примеры решения некоторых неравенств.

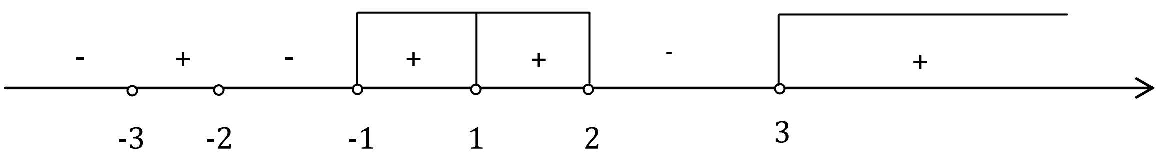
1. Решите неравенство$\frac{(3^{x^2}-3)(2^{-x}-2^3)(4^x-4^{x^2+2x-2})}{(x^2-5x+6)}>0$ и укажите наименьшую длину промежутка, в котором расположены все его решения, удовлетворяющие условию$x\leq 33$.

Решение.

$\frac{(3^{x^2}-3)(2^{-x}-2^3)(4^x-4^{x^2+2x-2})}{(x^2-5x+6)}>0$;$\frac{(x^2-1)(-x-3)(x-x^2-2x+2)}{(x-2)(x-3)}>0$;

$$\frac{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0.$$

Искомая наименьшая длина равна 33- (-3) = 36.



<u>Ответ: (-3;-2)∪(-1;1)∪(1;2)∪(3;33), 36.</u>

2. Решите неравенство $\frac{(\log_2 3)^x - (\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x} - \log_2 3} > 0$.

Решение.

$\frac{(\log_2 3)^x - (\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x} - \log_2 3} > 0$; $\frac{(\log_2 3 - 1)(x-2)}{(\log_2 3 - 1)(-x-1)} > 0$; $\frac{x-2}{-x-1} > 0$.

Ответ: (-1;2).

3. Решите неравенство $\frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(\log_2(8x^2+22x+13)-3)\log_{(x^2+8x+16)}(6x^2+4x+1)} \geq 0$.

Решение.

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(\log_2(8x^2+22x+13)-3)\log_{(x^2+8x+16)}(6x^2+4x+1)} \geq 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} 1-x > 0, \\ 8x^2+22x+16 > 0, \\ x^2+8x+16 > 0, \\ 6x^2+4x+1 > 0. \end{cases}$ $x \in (-\infty; -4) \cup \left(-4; \frac{-11-\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; 1\right)$.

$$\frac{(1-x-1)(x^2+2x+2-4x-5)}{(8x^2+22x+13-8)(x^2+8x+16-1)(6x^2+4x+1-1)} \geq 0$$

$\frac{-x(x-3)(x+1)}{x(x+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{4})(x+3)(x+5)(x+\frac{2}{3})} \geq 0$ С учетом ОДЗ получаем$(-\infty; -5) \cup \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Ответ: $(-\infty;-5) \cup \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.

4. Решите неравенство $\log_8(\frac{1}{3} - x)\log_{|2x+\frac{1}{3}|}(\frac{1}{3} - x) > \log_2 \frac{(\frac{1}{3}-x)}{\sqrt[3]{(2x+\frac{1}{3})^2}}$.

Решение.

$$\log_8(\frac{1}{3} - x)\log_{|2x+\frac{1}{3}|}(\frac{1}{3} - x) > \log_2 \frac{(\frac{1}{3}-x)}{\sqrt[3]{(2x+\frac{1}{3})^2}}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{3} - x > 0, \\ 2x + \frac{1}{3} \neq 0, \\ 2x + \frac{1}{3} \neq \pm 1; \end{cases} \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ x \neq -\frac{1}{6}, \\ x \neq \frac{\pm 3 - 1}{6}; \end{cases} \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ x \neq -\frac{1}{6}, \\ x \neq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}. \end{cases}$

X∈ $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\log_8\left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) \frac{\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|} > \log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) - \frac{2}{3}\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|$$

$$\frac{\left(\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right)\right)^2 - 3\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) \cdot \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| + 2\left(\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)^2}{\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|} > 0$$

$$\frac{\left(\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) - \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) - 2\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)}{\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|} > 0$$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{3} - x\right) - \left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)\left(\left(\frac{1}{3} - x\right) - \left|2x + \frac{1}{3}\right|^2\right)}{\left|2x + \frac{1}{3}\right| - 1} > 0$$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{3} - x\right)^2 - \left|2x + \frac{1}{3}\right|^2\right)\left(\frac{1}{3} - x - 4x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}\right)}{\left(2x + \frac{1}{3} - 1\right)\left(2x + \frac{1}{3} + 1\right)} > 0$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3} - x - 2x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - x + 2x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)} < 0$$

$$\frac{x\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)} > 0; \quad \frac{x\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{12}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)} > 0.$$

x∈ $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.