Муниципальное казённое общеобразовательное учреждение

лицей № 7 г. Солнечногорска

141500, Московская область, тел./факс 8-496-2- 64-59-58
г. Солнечногорск, ул. Почтовая, д.9 e-mail: sunschool.7@mail.ru

Применение координатно-векторного метода для решения задач С2

Учитель математики

Козикова Марина Геннадьевна

2013 г.

Основные формулы, применяемые при координатно-векторном методе

1. Расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

1) $ax+by+cz+d=0$, **где a, b, c и d находятся из системы** $\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0 \end{cases}$ **или**

2) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

3. Расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$:

$$\rho(M;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4. Если отрезок с концами в точках $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ разделен точкой $C(x;y;z)$ в отношении k, то координаты точки C определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k};\qquad y=\frac{y_1+ky_2}{1+k};\qquad z=\frac{z_1+kz_2}{1+k}$$

5. Угол между плоскостями α и β, заданными уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ соответственно:

$$\cos\angle(\alpha;\beta)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}};\qquad \cos\angle(\alpha;\beta)=\left|\cos\angle\left(\vec{n}_1;\vec{n}_2\right)\right|$$

, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - векторы нормалей к плоскостям α и β.

6. Угол между прямыми a и b, где $\vec{AB}\{x_1;y_1;z_1\}$- направляющий вектор прямой a, $\vec{CD}\{x_2;y_2;z_2\}$- направляющий вектор прямой b:

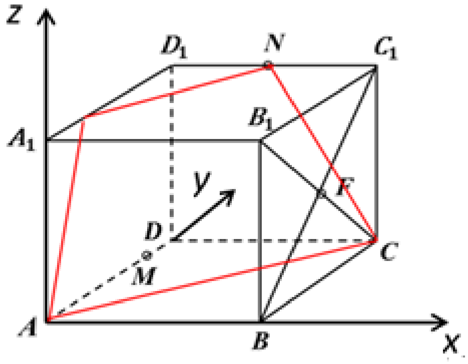
$$\cos\angle(a;b)=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

7. Угол между прямой a и плоскостью α, где $\vec{AB}\{x_0;y_0;z_0\}$- направляющий вектор прямой a, $ax+by+cz+d=0$ - уравнение плоскости α:

$$\sin\angle(a;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$$

Задача № 1.

Составьте уравнение плоскости (ANC), используя: 1) систему уравнений; 2) определитель третьего порядка.

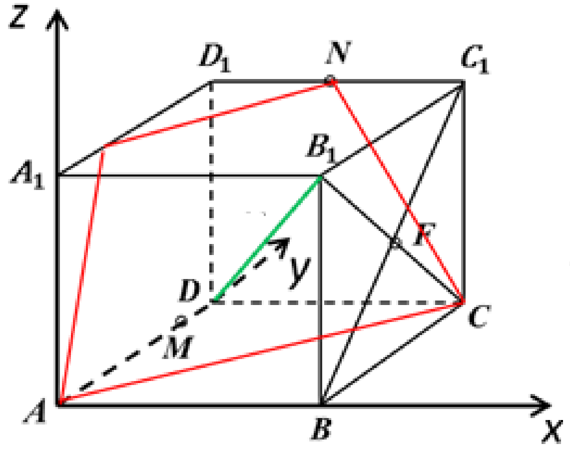


Решение:

I способ $ax+by+cz+d=0$ — общий вид уравнения плоскости. A(0;0;0) N($\frac{1}{2}$;1;1) C(1;1;0) $\begin{cases} d=0{,}5 \\ \frac{1}{2}a+b+c+d=0, \\ a+b+d=0; \end{cases}$ $\begin{cases} d=0, \\ b=-a, \\ -\frac{1}{2}a+c=0; \end{cases}$ $\begin{cases} d=0, \\ b=-a, \\ c=\frac{1}{2}a. \end{cases}$ $ax-ay+\frac{1}{2}az=0$ $2x-2y+z=0$ —уравнение плоскости (ANC)	II способ $\begin{vmatrix} x-x_1\ ;y-y_1;z-z_1 \\ x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1 \\ x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$- общий вид уравнения плоскости A(0;0;0) N(0,5;1;1) C(1;1;0) $\begin{vmatrix} x; & y; & z \\ 0{,}5; & 1; & 1 \\ 1; & 1; & 0 \end{vmatrix}=0$ $y+\frac{1}{2}z-z-x=0;$ $-x+y-\frac{1}{2}z=0;$ $2x-2y+z=0$-уравнение плоскости (ANC)

Задача №2.

Найдите угол: а) между прямой DB_1и плоскостью(ANC); б) между прямыми DB_1 и CN.

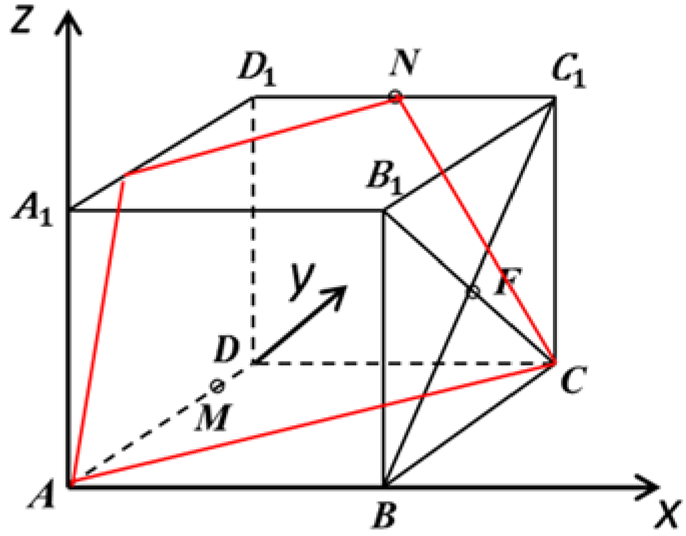


Решение:

а) 2x − 2y + z = 0 −уравнение плоскости (ANC) $\vec{n}\{2;2;1\}$- вектор нормали к (ANC) $\overrightarrow{DB_1}$ − направляющий вектор прямой DB_1 $\left.\begin{matrix}D(0;1;0)\\B(1;0;1)\end{matrix}\right\|$=>$\overrightarrow{DB_1}\{1;-1;1\}$ Пусть $\angle(DB_1(ANC)) = \alpha$ $\sin\alpha = \frac{\|2\cdot1+2\cdot1+1\cdot1\|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ $\alpha = arcsin\frac{5\sqrt{3}}{9}$ Ответ: $arcsin\frac{5\sqrt{3}}{9}$	б)$\overrightarrow{DB_1}$ − направляющий вектор прямой DB_1, $\overrightarrow{CN}$ − направляющий вектор прямой CN $\left.\begin{matrix}D(0;1;0)\\B(1;0;1)\end{matrix}\right\|$=>$\overrightarrow{DB_1}\{1;-1;1\}$ $\left.\begin{matrix}C(0;1;0)\\N(\frac{1}{2};0;1)\end{matrix}\right\|$=>$\overrightarrow{CN}\{-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\}$ Пусть $\angle(DB_1(ANC)) = \beta$ $\cos\beta = \frac{\|\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{CN}\|}{\|\overrightarrow{DB_1}\|\cdot\|\overrightarrow{CN}\|} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ $\cos\beta = \frac{\|-\frac{1}{2}+0+1\|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+0+1}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ $\beta = arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$

Задача № 3

Найдите угол между плоскостями (ANC) и (BB_1C_1)



Решение:

$\vec{n}\{2;-2;1\}$- вектор нормали к (ANC)
$\overrightarrow{AB}\{1;0;0\}$- вектор нормали к (BB_1C_1)

Пусть $\angle\big((ANC);(BB_1C_1)\big)=\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$$

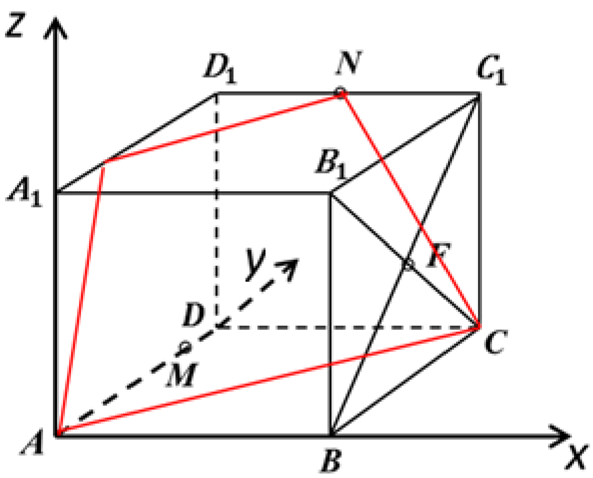
$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

$$\alpha=arccos\frac{2}{3}$$

Ответ: $arccos\frac{2}{3}$

Задача № 4

Найдите расстояние от точки F до плоскости (ANC).



Решение:

$$2x - 2y + z = 0 \text{ — уравнение плоскости } (ANC)$$

$$F\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

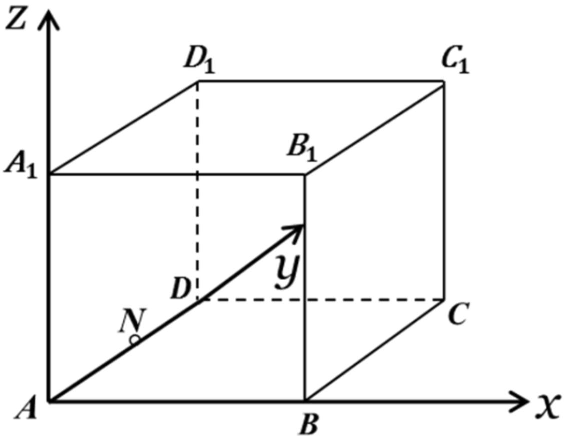
$$\rho(F;(ANC)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho(F;(ANC)) = \frac{\left|2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

Задача № 5

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ —прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину N ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 12.



Решение

Пусть α - плоскость сечения , проходящая через точку N перпендикулярно прямой $BD_1 \Rightarrow \overrightarrow{BD_1}$ - вектор нормали к плоскости α.

$DD_1 \perp (ADC) \Rightarrow \overrightarrow{DD_1}$ - вектор нормали к плоскости (ADC)

$$\cos((ADC);\alpha) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{BD_1};\overrightarrow{DD_1}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DD_1}\right|}$$

$$\left.\begin{array}{r} B(5;0;0) \\ D_1(0;\sqrt{11};12) \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{BD_1}\{-5;\sqrt{11};12\} \qquad \left.\begin{array}{r} D(\sqrt{11};0;0) \\ D_1(\sqrt{11};0;12) \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DD_1}\{0;0;12\}$$

$$\cos\angle((ADC);\alpha) = \frac{|12\cdot 12|}{\sqrt{25+11+144}\cdot\sqrt{144}} = \frac{12}{\sqrt{180}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

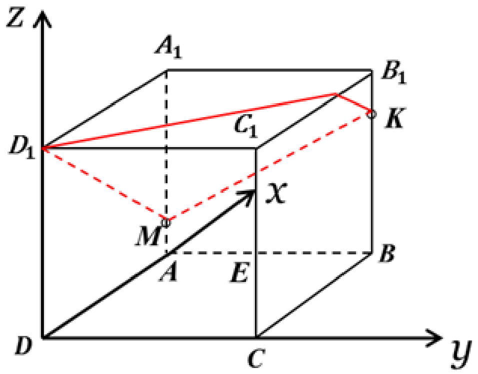
Воспользуемся формулой $tg^2\beta = \frac{1}{cos^2\beta} - 1$

Так как $\angle((ADC);\alpha)$ - острый, то $tg\angle((ADC);\alpha) = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Ответ: 0,5

Задача № 6

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найдите: а) угол между плоскостями (D_1MK) и (CC_1D_1); б) угол между прямыми MK и B_1D_1; в) угол между прямой CC_1 и плоскостью (D_1MK); г) расстояние от точки B до плоскости (D_1MK).



Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке D.

а) Составим уравнение плоскостей (D_1MK) и (CC_1D_1).

$D_1(0;0;21) \quad M(12;0;8) \quad K(12;12;13)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ - уравнение плоскости в общем виде

$$\begin{vmatrix} x & y & z-21 \\ 12 & 0 & -13 \\ 12 & 12 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$-156y + 144(z-21) + 156x + 96y = 0$

$156x - 60y + 144z - 144\cdot 21 = 0$

$13x - 5y + 12z - 252 = 0$ - уравнение плоскости (D_1MK)

$C(0;12;0) \qquad C_1(0;12;21) \qquad D_1(0;0;21)$

$$\begin{vmatrix} x & y-12 & z \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & -12 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

$12 \cdot 21x = 0$

$x = 0$ - уравнение плоскости (CC_1D_1)

Пусть $\angle((D_1MK);(CC_1D_1)) = \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{169+25+144}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

б) $\left.\begin{matrix} M(12;0;8) \\ K(12;12;13) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{MK}\{0;12;5\}$ - направляющий вектор прямой MK

$\left.\begin{matrix} B_1(12;12;21) \\ D_1(0;0;21) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{B_1D_1}\{-12;-12;0\}$ - направляющий вектор прямой B_1D_1

Пусть $\angle(MK; B_1; D_1) = \beta$ $\qquad \cos\beta = \dfrac{\left|\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{B_1D_1}\right|}{\left|\overrightarrow{MK}\right| \cdot \left|B_1D_1\right|}$

$$\cos\beta = \frac{144}{\sqrt{144+25} \cdot \sqrt{144+144}} = \frac{12}{13 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{13} \qquad \beta = \arccos\frac{6\sqrt{2}}{13}$$

в) $\left.\begin{matrix} C(0;12;0) \\ C_1(0;12;21) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{CC_1}\{0;0;21\}$ - направляющий вектор прямой CC_1

$\vec{n}\{13;-5;12\}$ - вектор нормали к плоскости $(D_1; MK)$

Пусть $\angle(CC_1;(D_1MK)) = \gamma$ $\qquad \sin\gamma = \dfrac{\left|\overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$

$$\sin\gamma = \frac{21 \cdot 12}{21 \cdot \sqrt{169+25+144}} = \frac{12}{13\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{13} \qquad \gamma = \arcsin\frac{6\sqrt{2}}{13}$$

г) $B(12;12;0)$ $\qquad 13x - 5y + 12z - 252 = 0$ - уравнение плоскости (D_1MK)

$$\rho(B;(D_1MK)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho(B;(D_1MK)) = \frac{|13 \cdot 12 - 5 \cdot 12 - 252|}{13\sqrt{2}} = \frac{|156 - 312|}{13\sqrt{2}} = \frac{156}{13\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Ответ: *а*) 45°; *б*) $\arccos\frac{6\sqrt{2}}{13}$; *в*) $\arcsin\frac{6\sqrt{2}}{13}$; *г*) $6\sqrt{2}$